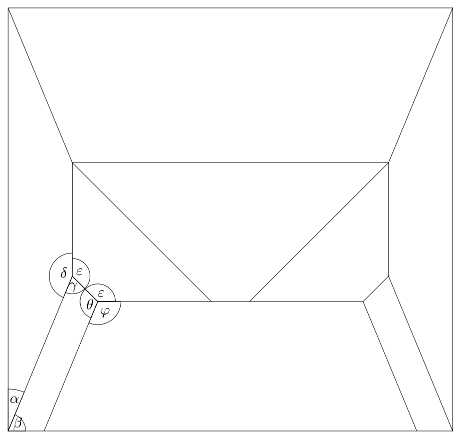
Нестандардни проблеми о подели геометријских фигура

Задатак 1. *Назовимо* правим једнакокраким трапезом *једнакокраки трапез чији краци нису паралелни (дакле, паралелограми и правоугаоници нису прави једнакокраки трапези). Посматрамо поделу правоугаоника на n (могуће различитих) правих једнакокраких трапеза. За такву поделу кажемо да је* стриктна *ако унија никојих i трапеза у подели, за $2 \leqslant i \leqslant n$, не чини прави једнакокраки трапез (другим речима, подела је стриктна ако се не може добити од неке поделе тог правоугаоника на мање од n правих једнакокраких трапеза, додатним дељењем неких трапеза из поделе на нове трапезе). Доказати да за све природне бројеве n, $n \geqslant 9$, постоји стриктна подела правоугаоника 2017×2018 на n правих једнакокраких трапеза.*

Решење. Конструисаћемо прво тражену поделу на 9 трапеза. Идеја је скицирана на слици, при чему треба проверити да ли је заиста могуће одабрати означене углове на такав начин да се постигне оваква конфигурација.

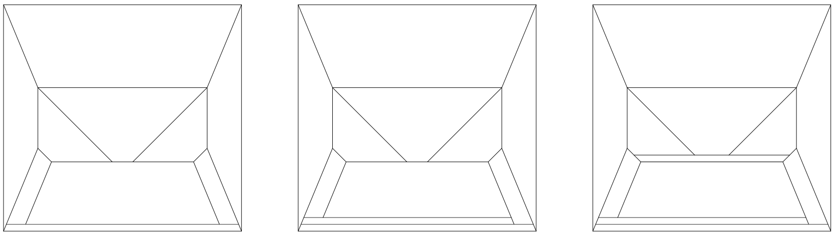


Очигледно имамо $\beta = 90^\circ - \alpha$ и $\gamma = \beta = 90^\circ - \alpha$, затим $\delta = 180^\circ - \alpha$, $\theta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$, $\varepsilon = 360^\circ - \gamma - \delta = 360^\circ - (90^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + 2\alpha$, и коначно $\varphi = 180^\circ - \beta = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$. Међутим, приметимо да мора важити једнакост $\varepsilon + \theta + \varphi = 360^\circ$, што се своди на:

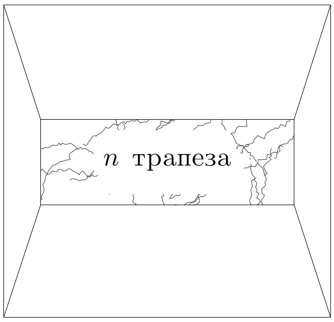
$$\begin{aligned}
(90^\circ + 2\alpha) + (90^\circ + \alpha) + (90^\circ + \alpha) &= 360^\circ;\\
270^\circ + 4\alpha &= 360^\circ;\\
4\alpha &= 90^\circ;\\
\alpha &= 22.5^\circ.
\end{aligned}$$

Дакле, за $\alpha = 22.5^\circ$ (остали углови се одатле директно израчунавају) можемо направити жељену поделу на 9 трапеза.

Модификацијом добијене поделе можемо добити и поделе на 10, 11, односно 12 трапеза (приказане на слици).



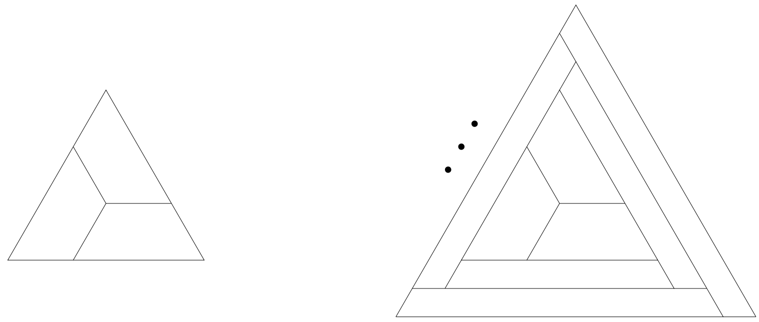
Да бисмо завршили доказ, довољно је показати још како се од произвољне поделе правоугаоника на n трапеза може добити подела правоугаоника на $n+4$ трапеза (ово је заиста довољно, будући да тада од наше поделе на 9 трапеза можемо, сукцесивном применом ове идеје, добити поделе на $13, 17, 21\ldots$ трапеза, тј. за све бројеве који дају остатак 1 при дељењу са 4; од наше поделе на 10 трапеза добијамо поделе за све бројеве који дају остатак 2 при дељењу са 4 итд.). Идеја је приказана на следећој слици.



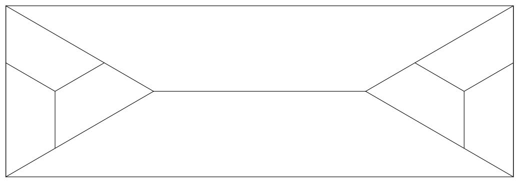
Другим речима, ако је „унутрашњи“ правоугаоник подељен на n трапеза, од њега можемо добити поделу „спољашњег“ правоугаоника на $n+4$ трапеза. Притом једино треба обратити пажњу на то да четири приказане косе дужи не смеју бити продужетак неке деобене дужи у унутрашњем правоугаонику (будући да би то могло нарушити услов да је подела стриктна). Међутим, ово је увек могуће испунити јер примећујемо да нам, кроз читав ток решења, димензије правоугаоника нису биле никакав ограничавајућ фактор (тј. све досад приказано могло се примењивати на правоугаонике било којих димензија), па стога димензије унутрашњег правоугаоника увек можемо прилагодити тако да се избегне поменути нежељен случај. Тиме је задатак решен. $\square$

Напомена 1. Тежина овог задатка највећим делом лежи у томе што није сасвим једноставно доћи до поделе на 9 трапеза с почетка (сви кораци после тога су знатно уочљивији). Показаћемо и алтернативно решење (које је вероватно једноставније пронаћи) уколико се услов $n \geqslant 9$ у поставци ослаби на $n \geqslant 12$.

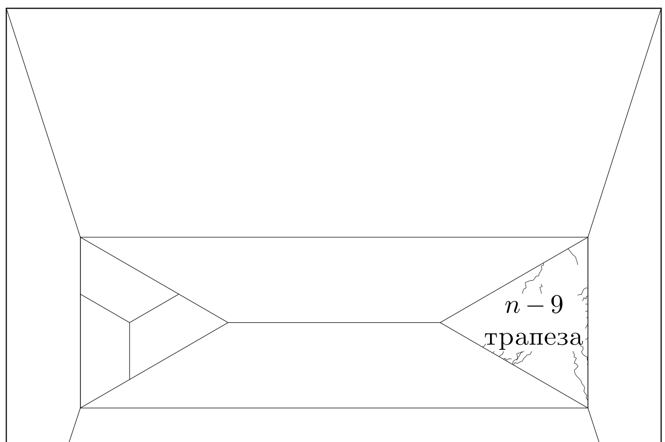
Најпре покажимо да, за произвољно k, $k \geqslant 3$, постоји стриктна подела једнакостраничног троугла на k правих једнакокраких трапеза. На наредној слици с леве стране је приказана подела на 3 трапеза, а с десне стране је приказано како се од те поделе, додавањем једног по једног трапеза, може доћи до поделе на k трапеза за произвољно k.



Посматрајмо сада наредну поделу правоугаоника на 8 трапеза.



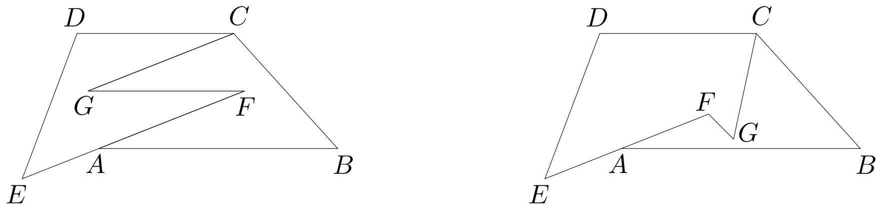
Приметимо, оваква подела не може се спровести за правоугаоник 2017×2018; прецизније, услов да би се оваква подела могла спровести јесте да дужина правоугаоника буде већа од његове висине помножене са $\sqrt{3}$ (како се два једнакостранична троугла не би „преклопили"). Међутим, надоградњом ове идеје може се добити подела произвољног правоугаоника на n трапеза за ма које n, $n \geqslant 12$, као што је приказано на следећој слици.



Напомена 2. Уколико би услов био још слабији, тј. уколико би се тражила подела за $n \geqslant 16$, тада би се задатак могао решити и само помоћу идеје с једнакостраничним троугловима из претходне напомене, без идеје с додавањем четири „околна“ трапеза виђене на крају (што је, приметимо, иста идеја виђена и у првобитном решењу за прелаз $n \mapsto n+4$). Наиме, у том случају било би довољно поделити по дужини задати правоугаоник на два подударна правоугаоника; тада би сваки од два тако добијена правоугаоника имао дужину бар двоструко дужу од висине, па би се један од њих могао поделити на 8 трапеза на начин виђен у претходној напомени, а други на 8 или више (колико год је потребно) трапеза на сличан начин (један од два једнакостранична троугла поделимо поново на 3 трапеза, а други на онолико колико је још потребно).

Задатак 2. *Уочени петоугао изломљеном линијом која повезује два његова темена подељен је на два међусобно подударна петоугла. Доказати да полазни петоугао има пар подударних углова, и да петоуглови на које је подељен имају по два пара паралелних страница.*

Решење. Нека је $ABCDE$ уочени петоугао. Нека је посматрана изломљена линија сачињена од d дужи. Ако она повезује два суседна темена, с једне њене стране ће остати 1 ивица полазног петоугла а с друге 4; ако она повезује два несуседна темена, с једне њене стране ће остати 2 ивице полазног петоугла, а с друге 3. Одатле наизглед следи да фигуре које се добијају након поделе не могу обе бити петоуглови (будући да би имале $d+1$ и $d+4$, односно $d+2$ и $d+3$ ивице), али постоји специјалан случај у ком је то могуће: уколико изломљена линија у једном темену представља продужетак једне ивице полазног петоугла (очигледно, угао полазног петоугла у том темену тада мора бити неконвексан), и то једне од 3 ивице које преостају са исте стране изломљене линије (док су с друге стране 2 ивице), тада оба многоугла која се добијају након поделе имају по $d+2$ странице, па ће за $d = 3$ ово заиста бити петоуглови. Дакле, рецимо да је посматрана изломљена линија $AFGC$, при чему је F на продужетку ивице EA.



Приметимо, међу угловима петоуглова $ABCGF$ и $CDEFG$ укупно морају бити бар два неконвексна: у темену F тачно један од ова два петоугла има неконвексан угао, и исто тако за теме G; међутим, осим ова два неконвексна угла, укупно још највише један може бити неконвексан (јер би тај додатни неконвексан угао морао да буде код темена код ког је и у полазном петоуглу угао неконвексан, и то не код темена A, будући да је угао код темена A у полазном петоуглу подељен на један опружен и један оштар угао; међутим како збир углова у петоуглу износи 540°, следи да, осим угла код темена A, још највише код једног темена полазног петоугла угао може бити неконвексан). Како укупан број неконвексних углова за ова два петоугла не може бити 3 (јер су та два петоугла подударна), следи да су тачно два угла неконвексна, тј. у сваком петоуглу по један, и то управо угао код темена F у једном петоуглу и угао код темена G у другом. Према томе, трансформација подударности која пресликава петоугао $ABCGF$ у $CDEFG$, назовимо је ψ, мора пресликавати теме F у теме G (ако је у петоуглу $ABCGF$ неконвексан угао код F) или обратно (ако је у петоуглу $ABCGF$ неконвексан угао код G). Размотримо ова два случаја.

- $\psi(F) = G$:

  Приметимо, у петоуглу $ABCGF$ теме G је суседно темену F, па зато слика $\psi(G)$ треба да буде суседна темену $\psi(F)$ (што је G) у петоуглу $CDEFG$. То оставља две могућности: $\psi(G) = F$ или $\psi(G) = C$. У свакој од њих ψ је једнозначно одређено, наиме:

  $$\psi : \begin{pmatrix} A & B & C & G & F \\ C & D & E & F & G \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \psi : \begin{pmatrix} A & B & C & G & F \\ F & E & D & C & G \end{pmatrix}.$$

  У првој могућности из $\psi(AF) = CG$ и $\psi(CG) = EF$ добијамо $AF \cong CG \cong EF$, што је очигледно немогуће (јер је дуж EF строго садржана у AF). Преостаје друга могућност (управо је она приказана на левој половини слике). У њој имамо $\psi(\measuredangle ABC) = \measuredangle FED$, а ово су управо углови код темена B и E у полазном петоуглу, тј. закључили смо да полазни петоугао има пар подударних углова (што је и било тражено). Осим тога, из $\psi(\measuredangle GFA) = \measuredangle CGF$ и $\psi(\measuredangle CGF) = \measuredangle DCG$ следи $\measuredangle GFA \cong \measuredangle CGF \cong \measuredangle DCG$, а одатле следи (по особинама трансверзалних углова) $FE \parallel GC$ и $FG \parallel CD$, тј. у петоуглу $CDEFG$ имамо два пара паралелних страница (а онда исто важи и за петоугао $ABCGF$, јер су подударни). Дакле, у овом случају смо добили све што је захтевано у поставци.

- $\psi(G) = F$:

  Слично као малопре, видимо да се теме F (пошто је суседно темену G у петоуглу $ABCGF$) мора пресликати или у теме G, или у теме E. У првој могућности поново добијамо случај који смо већ размотрили у претходном делу. Остаје:

  $$\psi : \begin{pmatrix} A & B & C & G & F \\ D & C & G & F & E \end{pmatrix}.$$

  (Ова могућност је приказана на десној половини слике.) Одавде имамо $\measuredangle BCG \cong \measuredangle CGF \cong \measuredangle GFE$, одакле следи $BC \parallel GF$ и $CG \parallel FE$, а такође имамо и $BC \cong CG \cong GF \cong FE$. То значи да су тачке B, G и E колинеарне, али тада би дуж BA секла CG и GF, што је контрадикција. Дакле, и овај случај је немогућ, чиме је задатак решен.

$\square$